Lernzettel TED

1 Maxwellsche Gleichungen

1.1 Integralform

$$\oint\limits_{\partial A} \vec{E}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\iint\limits_{A} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \text{„Induktionsgesetz“} \tag{1}$$

$$\oint\limits_{\partial A} \vec{H}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_{A} \left(\frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r},t)\right)\cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \text{„Durchflutungsgesetz“} \tag{2}$$

$$\oiint\limits_{\partial V} \vec{D}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint\limits_{V} \rho(\vec{r},t)\mathrm{d}V \qquad \text{„Gaussscher Satz“} \tag{3}$$

$$\oiint\limits_{\partial V} \vec{B}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \tag{4}$$

1.2 Differentielle Form

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad \text{„Induktionsgesetz“} \tag{5}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r},t) \qquad \text{„Durchflutungsgesetz“} \tag{6}$$

$$\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) \tag{7}$$

$$\mathrm{div}\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \tag{8}$$

1.3 Materialgleichungen

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon\vec{E}(\vec{r},t) \tag{9}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mu\vec{H}(\vec{r},t) \tag{10}$$

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \kappa\vec{E}(\vec{r},t) \tag{11}$$

1.4 Vereinfachte Form für statische Felder

$$\oint_{\partial A} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \qquad \text{„Induktionsgesetz“} \tag{12}$$

$$\oint_{\partial A} \vec{H}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_{A} \vec{J}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \text{„Durchflutungsgesetz“} \tag{13}$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint_{V} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V \qquad \text{„}\textsc{Gauss}\text{scher Satz“} \tag{14}$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \tag{15}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad \text{„Induktionsgesetz“} \tag{16}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \qquad \text{„Durchflutungsgesetz“} \tag{17}$$

$$\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \tag{18}$$

$$\mathrm{div}\vec{B}(\vec{r}) = 0 \tag{19}$$

1.5 Vereinfachte Form zeitharmonischer Anregung

$$\oint_{\partial A} \underline{\vec{E}}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\iint_{A} j\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \text{„Induktionsgesetz“} \tag{20}$$

$$\oint_{\partial A} \underline{\vec{H}}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_{A} \left(j\omega \underline{\vec{D}}(\vec{r}) + \underline{\vec{J}}(\vec{r}) \right) \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \text{„Durchflutungsgesetz“} \tag{21}$$

$$\oiint_{\partial V} \underline{\vec{D}}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad \text{„}\textsc{Gauss}\text{scher Satz“} \tag{22}$$

$$\oiint_{\partial V} \underline{\vec{B}}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \tag{23}$$

$$\mathrm{rot}\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = -j\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) \qquad \text{„Induktionsgesetz“} \tag{24}$$

$$\mathrm{rot}\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = j\omega \underline{\vec{D}}(\vec{r}) + \underline{\vec{J}}(\vec{r}) \qquad \text{„Durchflutungsgesetz“} \tag{25}$$

$$\mathrm{div}\underline{\vec{D}}(\vec{r}) = 0 \tag{26}$$

$$\mathrm{div}\underline{\vec{B}}(\vec{r}) = 0 \tag{27}$$

1.6 Vereinfachte Form für quasistationäre Felder

$$\oint_{\partial A} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \cdot \vec{A} \qquad \text{„Induktionsgesetz“} \tag{28}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad \text{„Induktionsgesetz“} \tag{29}$$

Ansonsten wie statische Felder.

2 Vektorpotential-Ansatz für Magnetostatik

Ansatz $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}^*$. Mit $\mathrm{rot}\vec{H} = \mathrm{rot}(\vec{B}/\mu) = \vec{J}$ folgt:

$$\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\vec{A}^* = \vec{J}$$

bei homogenem, isotropen und linearem Material folgt:

$$\vec{A}(\vec{r}_p) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r})}{|\vec{r}_d|}\mathrm{d}V \qquad \text{mit } \vec{r}_d = \vec{r}_p - \vec{r}$$

Damit läßt sich $\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$ berechnen.

3 Vektorpotential-Ansatz für Rechteckhohlleiter

Ansatz über elektrisches Feld (magnetisches Feld analog): $\underline{\vec{E}} = \mathrm{rot}\underline{\vec{A}}^H$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\underline{\vec{E}} &= \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\underline{\vec{A}}^H \\
&= \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\underline{\vec{A}}^H - \Delta\underline{\vec{A}}^H \\
&= -j\omega\mu\underline{\vec{H}} \\
\mathrm{rot}\underline{\vec{H}} &= j\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\underline{\vec{A}}^H \\
\Rightarrow \quad \underline{\vec{H}} &= j\omega\varepsilon\underline{\vec{A}}^H + \mathrm{grad}\underline{\Phi}^H \\
\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\underline{\vec{A}}^H - \Delta\underline{\vec{A}}^H &= \omega^2\mu\varepsilon\underline{\vec{A}}^H - j\omega\mu\,\mathrm{grad}\underline{\Phi}^H \\
\Delta\underline{\vec{A}} + k^2\underline{\vec{A}} &= 0 \quad \text{mit }\textsc{Lorentz}\text{konvention} \\
mit \quad k^2 &= \omega^2\mu\varepsilon \quad (Wellenzahl)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird mittels Produktansatz nach Bernoulli gelöst, in dem man davon ausgeht, daß eine Komponente des Vektorpotentials ausreicht, um alle Lösungen zu erhalten. Dazu wählt man die Komponente in Ausbreitungsrichtung des Welle.

4 Stetigkeiten an Grenzflächen

- Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes sind stetig: $E_{t1} = E_{t2}$
- Die Normalkomponeten des eletrischen Feldes sind proportional zu den Permittivitäten: $D_{n1} - D_{n2} = q_F$
- Die Tangentialkomponenten des magnetischen Feldes sind proportional zu den Permeabilitäten: $H_{t1} - H_{t2} = J_F$
- Die Normalkomponeten des magnetischen Feldes sind stetig: $B_{n1} = B_{n2}$

5 Sonstiges

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad \text{Poyntingscher Vektor} \tag{30}$$

$$\text{div} A = -j\omega\varepsilon\Phi \qquad \text{Lorentz-Konvention (für Pot.-Ansatz im Hohlleiter)} \tag{31}$$

$$\underline{A}_z(x, y, z) = \underline{f}(x)\,\underline{g}(y)\,\underline{h}(z) \qquad \text{Produkansatz nach Bernoulli} \tag{32}$$

$$\Delta\vec{H} = j\kappa\mu\omega\vec{H} \qquad \text{Helmholtz-Gleichung} \tag{33}$$

Herleitung der Helmholtz-Gleichung (nur für quasistationäre Felder):

$$\begin{aligned}
\text{rot}\vec{H} &= \kappa\vec{E} \\
\Longrightarrow \quad \text{rot rot}\vec{H} &= \kappa\,\text{rot}\vec{E} \\
mit \quad \text{rot}\vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \quad und \\
\text{rot rot}\vec{H} &= \underbrace{\text{grad div}\vec{H}}_{=0} - \nabla^2\vec{H} \quad folgt: \\
\Delta\vec{H} &= j\kappa\mu\omega\vec{H}
\end{aligned}$$

6 Formelzeichen

$\vec{E}(\vec{r}, t)$: elektrische Feldstärke
$\vec{H}(\vec{r}, t)$: magnetische Feldstärke
$\vec{D}(\vec{r}, t)$: dielektrische Verschiebungsdichte bzw. Erregung
$\vec{B}(\vec{r}, t)$: magnetische Induktion bzw. Flußdichte
$\vec{J}(\vec{r}, t)$: elektrische Stromdichte
$\vec{\rho}(\vec{r}, t)$: elektrische Raumladungsdichte